

Графы. Связность

1. В стране n городов. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, из этих двух авиакомпаний хотя бы одна такова, что что из любого города можно попасть в любой другой рейсами только этой авиакомпании.
2. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется *хорошей*, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
3. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно поженить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае можно сделать и то, и другое!". Мог ли он ошибиться?
4. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что если отменить любые $n - 1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками).
5. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос "есть ли дорога между ними?". Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.
6. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого её города, не выезжая за пределы республики.
7. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N , при котором Геракл сможет победить любую *стошею* гидру, нанеся не более, чем N ударов.