

Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2002-2003, 11 класс, второй день

1. Квадратные трёхчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.
2. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, ..., 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?
3. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера ω касается грани ABC в точке T . Сфера ω' касается грани ABC в точке T' и продолжений граней ABD , BCD , CAD . Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC .
4. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно определить пару фальшивых монет, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определить, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.)