Геометрия. Степени точек

1. Две окружности Ω и ω имеют центр O, причём ω внутри Ω. Из точки $A \in \Omega$ проведены касательные AB, AC к ω (B, C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает Ω в точках M и N. Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S. Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.

3. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность ω проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим за X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, X, Y лежат на одной окружности.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и отмечен центр I вписанной окружности. Хорда XY описанной окружности треугольника BID проходит через точку D. Докажите, что AD — биссектриса угла XAY.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

6. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты в остроугольном треугольнике ABC. На сторонах AB и AC взяты точки P и Q соответственно так, что $AP = BC_1$ и $AQ = CB_1$. Докажите, что AO делит отрезок PQ пополам, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1, а точка H' — отражение ортоцентра относительно стороны BC. Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке X. Докажите, что описанная окружность треугольника AXH' проходит через середину отрезка BC.