

Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2002-2003, 11 класс, первый день

1. Найдите все простые p , для каждого из которых существуют такие натуральные x и y , что $p^x = y^3 + 1$.
2. На диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $KD = DC$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle KDC$, $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle KBC$. Докажите, что $\angle KDA = \angle BCA$ или $\angle KDA = \angle KBA$.
3. Функции $f(x) - x$ и $f(x^2) - x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^6$ также возрастает при всех положительных x .
4. На плоскости даны точки A_1, A_2, \dots, A_n и точки B_1, B_2, \dots, B_n . Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i \neq j$ угол между векторами $\overline{A_i A_j}$ и $\overline{B_i B_j}$ — острый или прямой.

Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2002-2003, 11 класс, первый день

1. Найдите все простые p , для каждого из которых существуют такие натуральные x и y , что $p^x = y^3 + 1$.
2. На диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $KD = DC$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle KDC$, $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle KBC$. Докажите, что $\angle KDA = \angle BCA$ или $\angle KDA = \angle KBA$.
3. Функции $f(x) - x$ и $f(x^2) - x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^6$ также возрастает при всех положительных x .
4. На плоскости даны точки A_1, A_2, \dots, A_n и точки B_1, B_2, \dots, B_n . Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i \neq j$ угол между векторами $\overline{A_i A_j}$ и $\overline{B_i B_j}$ — острый или прямой.