Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2003-2004, 11 класс, второй день

1. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?

2. *Расстоянием* между числами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i, для которого $a_i \neq b_i$. Все пятизначные числа выписаны друг за другом в некотором порядке. Какова при этом минимально возможная сумма расстояний между соседними числами?

3. При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство
$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0?$$

4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает рёбра AD, BD, CD в точка K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает рёбра AC, BC, DC в точках P, Q, M соответственно. Оказалось, что $KL \parallel PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.