

Комбинаторная геометрия. Принцип крайнего

1. Из точки O выходит несколько лучей так, что угол между любыми двумя меньше 120° . Докажите, что среди этих лучей найдутся два луча, в угле между которыми находятся все остальные.
2. Несколько прямых общего положения делят плоскость на части (никакие две прямые не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке). Докажите, что к каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник.
3. Несколько прямых общего положения делят плоскость на части.
 - а) Докажите, что хотя бы одна часть является углом;
 - б) Докажите, что хотя бы три части являются углами.
4. Дан выпуклый многоугольник площади 1.
 - а) Докажите, что существует прямоугольник площади 2, в котором данный многоугольник полностью содержится;
 - б) Докажите, что существует прямоугольник площади $1/8$, который целиком содержится в данном многоугольнике.
5. Дан треугольник со сторонами, не превосходящими 1. Докажите, что круги радиуса $1/\sqrt{3}$ с центрами в вершинах треугольника полностью его покрывают.
6. На плоскости отмечено $N \geq 3$ различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \leq (n + 1)^2$.
7. На плоскости отмечено несколько точек, причём на каждой прямой, проходящей через любые две отмеченные точки, есть ещё хотя бы одна отмеченная точка. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной прямой.