

## Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2003–2004, 11 класс, первый день

1. В языке жителей Банановой Республики количество слов превышает количество букв в их алфавите. Докажите, что найдется такое натуральное  $k$ , для которого можно выбрать  $k$  различных слов, в записи которых используется ровно  $k$  различных букв.
2. Три окружности  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  радиуса  $r$  проходят через точку  $S$  и касаются внутренним образом окружности  $\omega$  радиуса  $R$  ( $R > r$ ) в точках  $T_1, T_2, T_3$  соответственно. Докажите, что прямая  $T_1T_2$  проходит через вторую (отличную от  $S$ ) точку пересечения окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .
3. Пусть многочлен  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  имеет хотя бы один действительный корень и  $a_0 \neq 0$ . Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи  $P(x)$ , можно получить из него число  $a_0$  так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.
4. В некотором государстве было 2004 города, соединенных дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещенном проезде по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге за ход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?