Числовой разнобой

1. Найдите все натуральные числа $n = p_1 p_2 \dots p_k$, у которых все простые множители $p_1, p_2, \dots, p_k$ различны и число $(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)$ делится на n.

2. Найдите все тройки чисел a, b, c, являющихся степенями 5 с целыми неотрицательными показателями, такие, что одно из них получается выписыванием двух других подряд.

3. На доске записаны пять чисел, одно из которых равно 2000. Разрешается стереть любое число и записать вместо него число $a+b-c$, где a, b, c — какие-то три из оставшихся чисел. Можно ли с помощью таких операций получить пять чисел, каждое из которых равно 2000?

4. Натуральные числа a и b таковы, что $2a-1$, $2b-1$ и $a+b$ — простые. Докажите, что ни $a^b + b^a$, ни $a^a + b^b$ не делятся на $a+b$.

5. Докажите, что чисел n таких, что сумма цифр числа 3^{n+1} не превышает суммы цифр числа 3^n бесконечно много.

6. Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?

7. Докажите, что для достаточно больших n все простые делители числа $2n!-1$ больше чем $n+2017$.