Неравенства-2

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $abc = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c$.

2. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите неравенство

$$(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab \leqslant 4.$$

3. Положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству $\frac{3}{abc} \geqslant a + b + c$. Докажите неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c$.

4. Числа a, b, c положительны. Докажите, что

$$\frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{2b + c + a} + \frac{c}{2c + a + b} \leqslant \frac{3}{4}.$$

5. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Докажите, что $a + b + c \leqslant abc + 2$.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2 = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{1 + 2bc} + \frac{b^2}{1 + 2ca} + \frac{c^2}{1 + 2ab} \geqslant \frac{3}{5}.$$

7. Неотрицательные x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Докажите, что $x + y + z \leqslant \frac{3}{2}$.

8. Неотрицательные a, b, c, d таковы, что $a + b + c + d = 4$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3 + 4} + \frac{b}{b^3 + 4} + \frac{c}{c^3 + 4} + \frac{d}{d^3 + 4} \leqslant \frac{4}{5}.$$

9. Для чисел x, y, z из отрезка $[0, 1]$ докажите неравенство

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + x^3 + z^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Памятка решателю неравенств

Помните, что большая часть неравенств, предлагаемых на школьных математических олимпиадах, предполагает наличие короткого красивого решения, не использующего ничего, кроме неравенств между средними и здравого смысла, которое очень сложно придумать. Однако, можно попытаться классифицировать некоторые стандартные трюки, замены, методы, часто помогающие найти решение.

1. **Гомогенизация.** Введение дополнительного параметра λ и замена переменных вида $a = \frac{a'}{\lambda}$ позволяет свести симметрическое неоднородное неравенство со связкой к симметрическому однородному без связки. (Достаточно параметр λ выразить в связке и в неравенстве и сопоставить полученные оценки).

   Полученное однородное неравенство или решается втупую, или сводится к неравенству Мюрхеда, или сводится к неравенствами Мюрхеда и Шура, или получается слишком громоздким и сложным, и тогда от идеи гомогенизации в качестве первого шага решения стоит отказаться.

2. **Нормализация.** Обратная операция к гомогенизации. Если доказываемое неравенство однородно, то на него можно навесить удобную связку.

3. **Метод Штурма.** Если функция $f(x)$ выпукла вниз, то значение величины $f(x) + f(y)$ падает при непрерывном сближении x и y друг к другу с постоянной суммой $x + y$. В частности, при такой вариации x и y величина $x^2 + y^2$ падает, а величина xy растёт (так как функции x^2 и $\ln x$ выпуклы вниз и вверх соответственно).

4. **UVW-метод**. Если неравенство симметрично зависит от трёх переменных a, b, c, то можно попробовать выразить всё через $u = a + b + c$, $v = ab + bc + ca$, $w = abc$, подвигать вверх-вниз кубическую параболу $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - ux^2 + vx - w$ и свести таким образом неравенство к неравенству одной переменной.

5. Задачи на экстремум выражения $f(a) + f(b) + f(c)$, где f — какая-то неприятная невыпуклая дробь или корень, часто решаются с помощью тупой оценки на $f(x)$. Порой помогает **метод касательных:** функцию $f(x)$ оцениваем касательной к ней в точке, при которой экстремум $f(a) + f(b) + f(c)$ достигается.

6. При решении неравенств с дробями иногда оказываются полезными **неравенство КБШ для дробей**. Прежде чем применять его непосредственно к неравенству, с ним можно чуть-чуть поработать. К примеру, домножить числитель и знаменатель на что-нибудь или *ревёрснуть*: вместо дробей $\frac{P}{Q}$ рассмотреть дроби $R - \frac{P}{Q} = \frac{RQ-P}{Q}$, где P, Q, R — некоторые выражения (смысл в том, что новые дроби надо оценить с другой стороны).

7. Иногда помогает *упорядочивание переменных* с последующим потенциальным применением **транснеравенства**.