

Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2004-2005, 11 класс, первый день

1. Найдите все пары чисел $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.
2. Известно, что существует такое число S , что если $a + b + c + d = S$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = S$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$. Найдите S .
3. Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной*, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.
4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB , в точке C' . Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC .