

## Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2005-2006, 11 класс, второй день

1. Докажите, что для каждого  $x$  такого, что  $\sin x \neq 0$ , найдется такое натуральное  $n$ , что  $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
2. В тетраэдре  $ABCD$  из вершины  $A$  опустили перпендикуляры  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $AD'$  на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах  $CD$ ,  $BD$ ,  $BC$  пополам. Докажите, что плоскость  $(B'C'D')$  параллельна плоскости  $(BCD)$ .
3. Докажите, что если натуральное число  $N$  представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.
4. Какое минимальное количество клеток можно закрасить черным в белом квадрате  $300 \times 300$ , чтобы никакие три черные клетки не образовывали уголок, а после закрашивания любой белой клетки это условие нарушалось?

## Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2005-2006, 11 класс, второй день

1. Докажите, что для каждого  $x$  такого, что  $\sin x \neq 0$ , найдется такое натуральное  $n$ , что  $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
2. В тетраэдре  $ABCD$  из вершины  $A$  опустили перпендикуляры  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $AD'$  на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах  $CD$ ,  $BD$ ,  $BC$  пополам. Докажите, что плоскость  $(B'C'D')$  параллельна плоскости  $(BCD)$ .
3. Докажите, что если натуральное число  $N$  представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.
4. Какое минимальное количество клеток можно закрасить черным в белом квадрате  $300 \times 300$ , чтобы никакие три черные клетки не образовывали уголок, а после закрашивания любой белой клетки это условие нарушалось?