

Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2005-2006, 11 класс, первый день

1. Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.
2. Произведение квадратных трёхчленов $x^2 + a_1x + b_1, x^2 + a_2x + b_2, \dots, x^2 + a_nx + b_n$ равно многочлену $P(x) = x^{2n} + c_1x^{2n-1} + \dots + c_{2n-1}x + c_{2n}$, где коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_{2n} положительны. Докажите, что для некоторого k ($1 \leq k \leq n$) коэффициенты a_k и b_k положительны.
3. В турнире 12 этапов и n участников. После каждого этапа все участники в зависимости от занятого места k получают баллы a_k (числа a_k натуральны и $a_1 > a_2 > \dots > a_n$). При каком наименьшем n устроитель турнира может выбрать числа a_1, \dots, a_n так, что после предпоследнего этапа при любом возможном распределении мест хотя бы двое участников имели шансы занять первое место?
4. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1 , а описанную окружность этого треугольника — в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P . Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром вписанной окружности треугольника ABC , параллелен AC .