

Стереометрия со сферами

Группа 11-2

13.11.17

1. Сфера вписана в многогранный угол. Докажите, что точки касания сферы со сторонами угла лежат на одной окружности.
2. В четырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы противоположных плоских углов этого четырехгранного угла равны.
3. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.
4. В закрытой крышечкой полусферической вазе лежат четыре одинаковых апельсина и грейпфрут. Апельсины касаются вазы, грейпфрут касается всех апельсинов. Верно ли, что точки касания грейпфрута с апельсинами лежат в одной плоскости?
5. В четырехугольную пирамиду $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, можно вписать сферу. Докажите, что сумма площадей граней SAB и SCD равна сумме площадей граней SBC и SDA .
6. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину A . Это сечение пересекает ребра AB , AC , AD в точках B_1 , C_1 , D_1 . Докажите, что B , C , D , B_1 , C_1 , D_1 лежат на одной сфере.
7. Вписанная сфера тетраэдра $SABC$ касается грани ABC в точке X , невписанная сфера касается грани ABC в точке Y (и продолжений граней SAB , SBC , SCA). Докажите, что X и Y изогонально сопряжены относительно треугольника ABC (т. е. что $\angle BAX = \angle YAC$ и т. п.).