Про многочлены

Группа 11-2

02.11.17

1. Дан график функции $y = ax^2$. Прямая пересекает её в точках с абсциссами x_1 и x_2, а саму ось абсцисс в точке с координатой x_3. Докажите, что $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_3}$.

2. Сто последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2+a_kx+b_k=0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

3. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$. Доказать, что при любых $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$ выполняется $P(x^2+y^2) \geqslant P(2xy)$.

4. Дано множество различных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Могло ли так оказаться, что множество корней уравнений $x^2 - a_ix + b_i = 0$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$) совпадает с исходным множеством?

5. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения

$$f\big(g(x)\big) = 0 \quad \text{и} \quad g\big(f(x)\big) = 0$$

не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

6. Уравнение $x^4 + t_1x^3 + t_2x^2 + t_3x + t_4 = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Какое наименьшее значение может принимать t_2, если $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{Z}$?

7. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают график функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$: первая — в точках A, D и E (слева направо), вторая — в точках B, C и F (слева направо). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось Ox равна сумме длин проекций дуг AB и EF.