Геометрия

Задачи, которые можно (и нужно) посчитать в векторах

Группа 11-2

19.10.17

1. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

2. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

3. В треугольнике ABC известно, что AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, для которой $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

4. Докажите, что сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.

5. Пусть O – центр описанной окружности, H – ортоцентр и M – точка пересечения медиан треугольника ABC.
(a) Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.
(b) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH = 2 \cdot OM$.
(c) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

6. На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABM, CBP, CDL и ADK (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.

7. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AB = AC$). На продолжениях сторон BC, AB и AC выбраны точки P, X, Y таким образом, что $PX \parallel AC$ и $PY \parallel AB$ и точка P лежит на луче CB. Точка T – середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC ($T \neq A$). Докажите, что $PT \perp XY$.