Составление и решение рекуррент

Группа 11-2

16.10.17

1. В пруд запустили пятьдесят лягушек. Каждый месяц количество лягушек в пруду увеличивается в четыре раза; в конце каждого месяца сто лягушек вылавливают и продают в соседний ресторан. Сколько лягушек окажется в пруду к концу n-го месяца?

2. Сколькими способами можно выписать в строчку n ноликов, крестиков и звёздочек, так, чтобы звёздочки не стояли рядом с крестиками?

3. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n-ом году роста первоначального растения?

4. В нулевой момент времени в вершине A восьмиугольника $ABCDEFGH$ сидит лягушка. Каждую секунду лягушка перепрыгивает в одну из соседних вершин, выбирая направление случайным образом равновероятно.
(a) Сколькими способами она может попасть из A в E за $2n$ прыжков?
(b) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя попадать в E на предыдущих шагах?

5. Сколькими способами можно замостить доминошками 2×1 доску размера $3 \times 2n$?

6. Пять моряков высадились на остров и к вечеру набрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно $1/5$ часть, после чего лег спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях предшественников. На утро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Каким могло быть наименьшее число орехов в собранной куче?

7. Докажите, что для любых натуральных значений m и n существует натуральное число k такое, что $(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$.

8. Дано натуральное n. На какую наибольшую степень двойки делится число $\left[(3+\sqrt{11})^{2n-1}\right]$?