Проекция ортоцентра на медиану

Группа 11-2

12.10.17

1. **(a)** Докажите, что точка N, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(b) Пусть точка M симметрична H относительно стороны AC. Докажите, что треугольник MNB прямоугольный.

(c) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника (точка R), выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

2. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке R.

(a) Докажите, что точка R лежит на медиане треугольника, выходящей из вершины B.

(b) Докажите, что A, C, R и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

3. Касательная к описанной окружности треугольника ABC ($AB > BC$), восстановленная в вершине A, пересекает прямую BC в точке M. Пусть X — отражение точки C относительно прямой AM, а Y — отражение точки A относительно центра M. Докажите, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности.

4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка X, а на её продолжении за C точка Y так, что $AX = XY$. Перпендикуляр к BX, восставленный в точке B, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Прямые AD и BX пересекаются в точке E. Докажите, что ортоцентр треугольника AEY лежит на BD.

5. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника ABH пересекает окружность, построенную на отрезке AC как на диаметре, в точке $K \neq A$. Докажите, что прямая CK делит отрезок BH пополам.

6. Про треугольник ABC известно, что $AB > AC > BC$. На стороне AB выбрана точка D такая, что $CD = BC$. Кроме это, отмечена середина стороны AC — точка M. Докажите, что если $\angle BAC = 2\angle ABM$, то $BD = AC$.