Решение рекуррент

Группа 11-2

09.10.17

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, которая удовлетворяет с заданными $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \ldots + t_k a_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

называется *линейной рекуррентной (возвратной) последовательностью k-ого порядка.*

Уравнение

$$x^k - t_1 x^{k-1} - t_2 x^{k-2} - \ldots - t_k = 0$$

называется *характеристическим* уравнением последовательности $\{a_n\}$.

Про разные действительные корни

1. **(a)** Докажите, что множество последовательностей удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \ldots + t_k a_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

образует линейное пространство с естественными операциями.

(b) Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = x_0^n$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \ldots + t_k a_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения.

(c) Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет k различных корней — $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Докажите, что при фиксированных $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ существует ровно один набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ такая, что

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_k x_k^n \ (n \geq 0).$$

2. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geq 0$):

(a) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

(b) $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+3} = 2a_{n+1} + a_{n+1} - 2a_n$;

(c) **(числа Фибоначчи)** $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

3. Пусть $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, (n \geq 0)$.

(a) Выразите через a_n и b_n число $(1-\sqrt{2})^n$.

(b) Докажите равенство $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

(c) Найдите формулы n-го члена для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Что-то не так с корнями

4. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geq 0$):

(a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$;

(b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

5. Что делать с рекуррентной последовательностью второго порядка, если у характеристического уравнения нет корней?

6. Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет корень x_0 кратности 2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что

$$a_n = (c_1 + c_2 n) x_0^n \ (n \geq 0).$$

Просто задачи

7. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?

8. В нулевой момент времени в вершине A шестиугольника $ABCDEF$ сидит лягушка. Каждую секунду лягушка перепрыгивает в одну из соседних вершин, выбирая направление случайным образом равновероятно.

(a) Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков?

(b) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D (там находится мина)?