

# Рекуррентное

Группа 11-2

05.10.17

## Лягушка Фибоначчи

- (а) Лягушка Фибоначчи стоит на первой клетке доски и умеет прыгать на одну или на две клетки вперёд. Доска содержит  $n + 2$  клетки. На  $k$ -й клетке сидит огромный кузнечик. На клетке перед кузнечиком останавливаться нельзя, иначе лягушка спугнёт кузнечика и не сможет его съесть. Съев кузнечика, лягушка становится тяжёлой и может прыгать только на соседнюю клетку. Сколькими способами лягушка сможет допрыгать до последней клетки, съев по пути кузнечика?

(б) Лягушка Фибоначчи стоит на первой клетке доски, содержащей  $n + m$  клеток. На  $(n - 1)$ -й клетке находится вкусная не пугливая муха, на  $n$ -й — не пугливый комар. Сколькими способами лягушка сможет добраться до последней клетки доски, сожрав по пути только муху, но не комара? Съев комара (муху при этом можно есть или не есть)?
- Докажите комбинаторными рассуждениями (используя первую задачу) тождества
  - $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;
  - $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ .

## Формулы

- Найдите значение выражения  $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$ .
- Докажите, что  $F_{2n}$  делится на  $F_n$ .
- Докажите, что  $F_{kn}$  делится на  $F_n$ .
- Докажите, что  $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ .
- Докажите, что  $F_n$  делится на  $F_m$  тогда и только тогда, когда  $n$  делится на  $m$  (или когда  $m = 2$ ).
- Вычислите  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_N}{F_{N-1} \cdot F_{N+1}}$ .
- Можно ли натуральный ряд разбить на последовательности, каждая из которых удовлетворяет рекуррентному соотношению чисел Фибоначчи?