

# Размерность векторного пространства

Группа 11-2

25.09.17

1. Докажите, что если в пространстве есть базис из  $n$  векторов, то любые  $n + 1$  векторов линейно зависимы.

**Следствие.** Если в пространстве есть базис из  $n$  векторов, то любой другой базис тоже содержит  $n$  векторов.

**Определение.** Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется конечномерным, а число векторов в каждом из его базисов его размерностью. Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется бесконечномерным.

2. Изначально все клетки доски  $8 \times 8$  чёрные. Сколько различных раскрасок можно получить, перекрашивая столбцы и строки?
3. На кружке по математике  $n$  школьников решали  $n + 1$  задачу. У преподавателя есть таблица размером  $(n + 1) \times n$  ( $n + 1$  строка,  $n$  столбцов), в которой записано, какие задачи кто решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что можно назвать некоторые задачи *интересными*, а некоторые — *скучными*, и каждой задаче присвоить некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за интересные задачи столько же баллов сколько за скучные.
4. Изначально все клетки доски  $8 \times 8$  чёрные. За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в белый цвет?
5. Числа на главной диагонали таблицы размера  $10 \times 10$  не меньше двадцати, а модули всех остальных не превосходят 1. Докажите, что строки таблицы являются линейно независимыми векторами.
6. Каждая клетка доски  $4 \times 4$  покрашена в чёрный или белый цвет. Разрешено перекрасить любую клетку и все соседние с ней по стороне клетки. Сколько различных раскрасок доски можно получить, многократно применяя такие операции?
7. В таблице  $n \times m$  записаны числа так, что у любого прямоугольника  $a \times b$  со сторонами, параллельными сторонам таблицы, суммы чисел в противоположных вершинах равны. Некоторые числа стёрли, но по оставшимся можно восстановить таблицу. Докажите, что осталось не менее чем  $(n + m - 1)$  чисел.