Векторные пространства

Группа 11-2
18.09.17

Определение. Пусть даны множество V («векторы») и поле $\mathbb{K}$ («числа»), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

- Сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент (0) и у каждого вектора v есть обратный по сложению $(-v)$;
- $1 \cdot v = v$; $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ (здесь $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $v \in V$);
- $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$; $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$.

Тогда V называется линейным (векторным) пространством над $\mathbb{K}$.

1. Задайте естественную структуру линейного пространства на следующих множествах:
(a) K^n — строки из n чисел;
(b) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b_n$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$;
(c) все многочлены над полем $\mathbb{K}$;
(d) многочлены степени не выше n над полем $\mathbb{K}$;
(e) векторы на плоскости и в пространстве;
(f) последовательности элементов поля $\mathbb{K}$;
(g) множество функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;
(h) множество непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

2. Образуют ли линейные пространства следующие множества (относительно естественных операций):
(a) многочлены степени n над полем $\mathbb{K}$;
(b) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);
(c) многочлены с фиксированным корнем α;
(d) строки длины n с нулевой суммой элементов;
(e) строки длины n с нулевым произведением элементов;
(f) последовательности элементов поля $\mathbb{K}$, в которых конечное число ненулевых элементов.

3. Дайте определение подпространства.

4. Рассмотрим пространство векторов на плоскости. Опишите все его подпространства.

Определение. Подмножество S векторного пространства называется системой образующих этого пространства, если всякий его вектор можно представить в виде $\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n$, где $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Выражение $\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется линейной комбинацией векторов $v1, \ldots, v_n$.

Определение. Пусть S — произвольное подмножество векторного пространства V. Линейной оболочкой множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

5. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ — семейство векторов векторного пространства V. Тогда следующие условия равносильны:
(a) никакой вектор из V нельзя выразить через векторы из S двумя разными способами;
(b) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;
(c) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Определение. Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется линейно независимым, а не обладающее линейно зависимым.

6. Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

- система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;
- система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;
- если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;
- если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;
- если ЛНЗ семейство векторов не является системой образующих векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Определение. Система образующих S векторного пространства называется его базисом, если всякий элемент пространства представляется в виде линейной комбинации элементов из S, причем единственным образом.

Теорема. Следующие условия равносильны:

- S — базис пространства V;
- S — линейно независимая система образующих пространства V;
- S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;
- S система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.