

# Геометрический разнойой

Группа 11-2

14.09.17

1. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Пусть  $R, R_1, R_2$  — радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC, A_1B_1C, AA_1B_1$  соответственно. Докажите, что  $R^2 = R_1^2 + R_2^2$ .
2. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ . На лучах  $BA$  и  $CA$  отложены отрезки  $BX$  и  $CY$ , равные стороне  $BC$ . Докажите, что прямая  $XU$  проходит через точку пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ .
3. Дан правильный треугольник  $ABC$ . Прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно. Точка  $D$  — центр правильного треугольника  $PMB$ , точка  $E$  — середина отрезка  $AP$ . Найдите углы треугольника  $DEC$ .
4. (а) Две равные окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведена прямая, пересекающая окружность  $\omega_1$  в точке  $P$ , а окружность  $\omega_2$  в точке  $Q$ . Докажите, что поворот около точки  $A$ , отображающий  $\omega_1$  на  $\omega_2$ , отображает  $P$  на  $Q$ .  
(б) Для произвольной точки  $M$  описанной около треугольника окружности построены симметричные ей относительно прямых  $BC, CA, AB$  соответственно точки  $M_a, M_b, M_c$ . Доказать, что точки  $M_a, M_b, M_c$  лежат на одной прямой, проходящей через точку  $H$  пересечения высот треугольника  $ABC$ .
5. Точки  $A_1, B_1, C_1$  выбраны на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Оказалось, что  $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$ .  
(а) Пусть  $I$  — центр вписанной окружности. Докажите, что четырехугольники  $AC_1IB_1, BA_1IC_1$  и  $CB_1IA_1$  вписанные.  
(б) Пусть  $I_A, I_B$  и  $I_C$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$  соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $I_AI_BI_C$ , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .  
(с) Пусть  $O_A, O_B$  и  $O_C$  — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник  $O_AO_BO_C$ , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .