Стереометрия

1. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковых ребра хорошие, то четвёртое боковое ребро также является хорошим.

2. Плоскость Π касается сферы с диаметром AB в точке A. Из точки C этой плоскости проведена касательная CD к сфере. Прямая BD пересекает плоскость Π в точке F. Докажите, что $CA = CF$.

3. В пространстве зафиксированы прямая a и точка A на ней не лежащая. Через точку A проводится произвольная прямая ℓ. На прямых a и ℓ отмечаются точки X и Y соответственно так, что XY — общий перпендикуляр к a и ℓ. Найдите геометрическое место точек Y.

4. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 тетраэдра пересекаются в одной точке H. Докажите, что H, A_1, и три точки, делящие отрезки BB_1, CC_1, DD_1 в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

6. В тетраэдре $ABCD$ определим точку H_a как проекцию вершины A на плоскость BCD, точку H_{ac} как проекцию точки H_a на прямую AC, аналогично определим другие такие точки. Докажите, что если плоские углы при вершине A равны, то точки H_{ab}, H_{ac}, H_{ad}, H_{ba}, H_{ca} и H_{da} лежат на одной сфере.

7. В неправильном тетраэдре $ABCD$ все грани равны, O — центр его описанной сферы, H — точка пересечения высот треугольника BCD. Докажите, что $AOH \perp BCD$.

8. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ отмечены точки A_1, B_1, C_1 так, что центр описанной сферы тетраэдра $SA_1B_1C_1$ равноудален от точек A, B, C. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно середин ребер SA, SB, SC соответственно. Докажите, что существует сфера, проходящая через точки A_2, B_2, C_2, A, B, C.

9. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.