Групповая симметрия

1. Можно ли числа от 1 до 2016 разбить на группы по 7 чисел так, чтобы сумма чисел в каждой группе делилась на 2017?

2. Скажем, что колода из 52 карт сложена *правильно*, если каждая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно **(a)** делится на 12!; **(b)** делится на 13!.

3. Вершины правильного 45-угольника раскрашены в красный, синий и зеленый цвета, каждого цвета по 15 вершин. Докажите, что найдутся три равных треугольника такие, что вершины одного из них красного цвета, второго — синего, третьего — зеленого.

4. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ склеен в тор. Докажите, что число способов разрезать тор на связные клетчатые фигурки четной площади четно.

5. Дано простое число $p > 2$. Сколькими способами можно выбрать p чисел из множества $1, 2, \ldots, 2p$ так, чтобы сумма делилась на p?

6. Докажите, что количество способов разрезать клетчатую доску 999×999 на уголки из трех клеток делится на 128.

7. Внутри сферы с центром O находится икосаэдр с центром A, ребра и грани которого прозрачны. В точке A находится источник света, 12 вершин икосаэдра отбрасывают тени на сферу. Икосаэдр повернули так, что точка A осталась его центром. Докажите, что центр масс теней всех вершин остался на месте.

8. На сфере отметили 4 случайные точки (независимо друг от друга; вероятностная мера пропорциональна мере площади). Найдите вероятность того, что тетраэдр с вершинами в этих точках содержит центр сферы.