Полуописанная окружность

Во всех задачах этого листика дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Точки I, I_A, I_B, I_C — центры вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC напротив вершин A, B, C соответственно. Вписанная окружность ω касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Обозначим через Ω_A окружность, проходящую через вершины B и C и касающуюся ω, точку касания назовем T_A.

1. Докажите, что точки T_A, A_1, I_A лежат на одной прямой.

2. **(a)** Докажите, что точки T_A, B, C_1, I_A лежат на одной окружности. **(b)** Окружность из предыдущего пункта пересекает прямую BC второй раз в точке S. Докажите, что $CS = CA_1$.

Середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 обозначим через M и N соответственно.

3. Докажите, что касательные к ω в точках A_1 и T_A пересекаются на прямой MN.

4. Докажите, что точки T_A, A_1, N и C лежат на одной окружности.

Обозначим вторые точки пересечения отрезков AB и AC с окружностью Ω_A через P и Q соответственно

5. **(a)** Докажите, что точки T_A, N, C_1 и P лежат на одной окружности. **(b)** Докажите, что проекция точки I на MN также лежит на окружности из пункта (**a**).

6. Прямые T_AM и T_AN второй раз пересекают окружность Ω_A в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PX, QY, MN и AI пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что прямые BM, CN и A_1T_A пересекаются в одной точке.

8. Прямые BM и CN второй раз пересекают окружность ω_A в точках U и V. Докажите, что прямая UV проходит через середины отрезков B_1M и C_1N.

Аналогично определим Ω_B, Ω_C, T_B, T_C.

9. Обозначим через W_A середину дуги BC окружности Ω_A, не содержащей точку T_A. Аналогично определим W_B, W_C. Докажите, что существует окружность, касающаяся окружностей Ω_A, Ω_B, Ω_C в точках W_A, W_B, W_C соответственно.

10. Докажите, что прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в одной точке.