

SOS-метод решения неравенств

0. Даны положительные числа a, b, c . Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}.$$

2. (Неравенство Шура) Для положительных чисел a, b, c и вещественного λ докажите неравенство

$$a^{\lambda+2} + b^{\lambda+2} + c^{\lambda+2} + a^{\lambda}bc + b^{\lambda}ca + c^{\lambda}ab \geq a^{\lambda+1}(b+c) + b^{\lambda+1}(c+a) + c^{\lambda+1}(a+b).$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$3 \cdot (a^3 + b^3 + c^3 + abc) \geq 4 \cdot (a^2b + b^2c + c^2a).$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите неравенство

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) \leq \frac{2}{3}.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(a-b)(a-c)}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(b-c)(b-a)}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(c-a)(c-b)}{2c^2 + (a+b)^2} \geq 0.$$

6. Для любых положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6.$$

SOS theorem. Даны вещественные числа $a \geq b \geq c$ и S_a, S_b, S_c . Предположим, что выполнено хотя бы одно из трех условий:

- $S_b \geq 0, S_a + S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0$;
- $S_a \geq 0, S_c \geq 0, S_a + 2S_b \geq 0, 2S_b + S_c \geq 0$;
- $S_b \geq 0, S_c \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$.

Тогда $(a - b)^2S_c + (b - c)^2S_a + (c - a)^2S_b \geq 0$.

Доказательство теоремы.

Введем обозначения $x := a - b, y := b - c$, тогда $x + y = a - c$ и $x, y \geq 0$ в силу упорядочивания.

Очевидно, что $x^2 + y^2 \leq (x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$.

Условие 1. Имеем $(c - a)^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2$. Раз $S_b \geq 0$, то

$$(a - b)^2S_c + (b - c)^2S_a + (c - a)^2S_b \geq (a - b)^2(S_b + S_c) + (b - c)^2(S_a + S_b) \geq 0.$$

Условие 2. Имеем $(c - a)^2 \leq 2 \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2)$. Если $S_b \geq 0$, то утверждение очевидно; в противном случае:

$$(a - b)^2S_c + (b - c)^2S_a + (c - a)^2S_b \geq (a - b)^2(S_c + 2S_b) + (b - c)^2(S_a + 2S_b) \geq 0.$$

Условие 3. Заметим, что $a - c \geq \frac{a}{b} \cdot (b - c)$ в силу упорядочивания. Раз $S_b \geq 0$, то

$$(b - c)^2S_a + (c - a)^2S_b \geq (b - c)^2\left(S_a + \frac{a^2}{b^2}S_b\right) \geq 0;$$

а дальше воспользуемся $S_c \geq 0$, и все. *Теорема доказана.*

Полезные факты.

Во-первых,

$$(a - b)(b - c) = \frac{(c - a)^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2}{2}.$$

Во-вторых, если многочлен $P(a, b, c)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяет соотношениям $P(a, b, c) = P(b, a, c)$ и $P(a, a, c) = 0$, то он делится на $(a - b)^2$. То же самое касается и рациональных функций.

В-третьих, если $P(a, b, c)$ — циклически симметричный многочлен, то

$$(a - b) \cdot P(a, b, c) + (b - c) \cdot P(b, c, a) + P(c - a) \cdot P(c, a, b) = 0,$$

а значит после первого вынесения скобок $(a - b), (b - c), (c - a)$ в них можно безнаказанно добавлять циклически симметричные выражения.