Разнобой по геометрии

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

2. Обозначим B_0 и C_0 середины «меньших» дуг AC и AB описанной окружности Ω остроугольного треугольника ABC; точка O — центр Ω. Рассмотрим окружность ϑ, касающуюся отрезков AB, AC и описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что точки касания ϑ с отрезками AB, AC лежат на прямой B_0C_0.

3. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC, восстановленные в вершинах A и C, пересекаются в точке P; касательные к описанной окружности треугольника BID, восстановленные в вершинах B и D, пересекаются в точке Q. Докажите, что точки P, I, Q лежат на одной прямой.

4. Прямая, проходящая через основания биссектрис углов B и C треугольника ABC, пересекает его описанную окружность в точках P и Q; точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника PIQ вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

5. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Точка X — проекция точки C на отрезок PQ. Докажите, что вписанные окружности треугольников PBC и QDC видны из точки X под равными углами.

6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках C_1 и B_1 соответственно; точка I_A — центр вневписанной окружности напротив вершины A. Точки C_2 и B_2 — середины отрезков I_AC_1 и I_AB_1 соответственно. Докажите, что прямые BC_2 и CB_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

7. Вписанная окружность ω остроугольного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На прямой B_1C_1 отмечены такие точки M и N, что $\angle MBC = \angle NCB = 90^\circ$. Прямые A_1M и A_1N второй раз пересекают окружность ω в точках P и Q соответственно. Прямые CP и BQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая A_1X содержит медиану треугольника A_1MN.