

Матрицы

1. В матрице 15×15 изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой ее столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в матрице можно получить такими ходами?
2. В матрице $3n \times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов — столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк — строка с n нулями, n единицами и n двойками.
3. Матрица $n \times n$, элементы которой — целые числа в диапазоне от 1 до $(2n - 1)$, называется *разнообразной*, если при всех i все $(2n - 1)$ чисел в i -той строке и i -том столбце различны. Докажите, что:
(а) не существует разнообразной матрицы при $n = 1997$;
(б) разнообразные матрицы существуют для бесконечно многих n .
4. Дано четное натуральное число n . Рассмотрим множество \mathcal{M} матриц размера $n \times n$, элементы которых — вещественные числа, дающие в сумме 0 и по модулю не превосходящие 1. Найдите наименьшее число C такое, что в каждой матрице из \mathcal{M} найдется ряд (столбец или строка), сумма элементов в котором по модулю не превосходит C .
5. Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$. Обозначим за X_i множество элементов в ее i -той строке, а за Y_j — множество элементов в ее j -том столбце. Будем называть A *серебряной*, если множества $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ различны. Найдите наименьшее натуральное n такое, что существует серебряная матрица размера 2004×2004 с элементами из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.