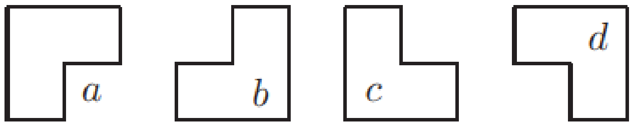
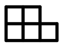
[Центр педагогического мастерства]
[*2017–2018*] Кружок по математике, 11 класс
Кушнир А.
25 января 2018

Клетчатая комбинаторика

1. Прямоугольник 2018×2019 разрезан на уголки из трех клеток:



Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.

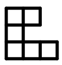
2. **(a)** Предположим, что прямоугольник $5 \times n$ можно покрыть с помощью n фигур  (фигуры можно поворачивать и отражать). Докажите, что n четно.

(b) Докажите, что для каждого $k \geqslant 3$ существует более $2 \cdot 3^{k-1}$ способов покрытия прямоугольника $5 \times 2k$ с помощью $2k$ таких фигур. (Симметричные покрытия считаются различными).

3. *Блок* представляет собой трехступенчатую лестницу ширины 2, построенную из двенадцати одинаковых единичных кубиков. Найдите все целые n, для которых с помощью таких блоков можно построить куб со стороной n.

4. Дано нечетное $n \in \mathbb{N}$. Единичные квадраты доски $n \times n$ покрашены в шахматном порядке, причем углы черные. При каких n можно покрыть все черные квадраты неперекрывающимися трехклеточными уголками? В случае, когда это возможно, какое минимальное количество уголков понадобится?

5. Шахматную доску случайным образом разбили на доминошки. В какое наименьшее число цветов можно гарантированно раскрасить эти доминошки с условием, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были раскрашены в разные цвета?

6. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) такие, что прямоугольник $m \times n$ может быть покрыт вот такими  *крюками*. Крюки можно поворачивать и симметрично отражать. Прямоугольник должен быть покрыт без дыр и перекрытий. Ни один крюк не должен вылезать за пределы прямоугольника.