UVW-метод решения неравенств

1. Вещественные числа x, y, z таковы, что $x+y+z = x^2+y^2+z^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать $x^3 + y^3 + z^3$?

2. Если $a+b+c = 3$, то какое наименьшее значение выражения $(3+2a^2)(3+2b^2)(3+2c^2)$?

3. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a + b) + a^2c^2(a + c) + b^2c^2(b + c).$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите, что

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geqslant 4\sqrt{3}.$$

5. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geqslant 2.$$

6. Для вещественных x, y, z выполнено $x + y + z = 0$. Докажите, что

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geqslant 6xyz.$$

7. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geqslant 2\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

8. Для положительных a, b, c выполнено $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a + 3}{3a + bc} + \frac{b + 3}{3b + ca} + \frac{c + 3}{3c + ab} \geqslant 3.$$

9. Для действительных x, y, z докажите, что $(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geqslant (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2$. Когда достигается равенство?