Производящие функции

Определение. Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется формальный степенной ряд:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

1. Напишите (в незамкнутом виде, в ответе можно использовать бесконечные произведения) производящие функции следующих последовательностей:
(a) a_k — число способов разбить число k на различные натуральные слагаемые без учета порядка;
(b) b_k — количество способов разбить число k на натуральные слагаемые без учета порядка;
(c) c_k — количество способов разбить число k на нечетные натуральные слагаемые без учета порядка.
(d) Докажите, что $a_k = c_k$.

2. На доске в клетке $(0, 0)$ стоит король, который умеет ходить только в трёх направлениях: вверх, вправо и вправо-вверх. Обозначим за $a_{(m,n)}$ ($b_{(m,n)}$) число траекторий короля, заканчивающихся в (m, n), имеющих чётное (соответственно нечётное) число ходов вправо-вверх. Найдите производящие функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$ последовательностей $a_{(m,n)} + b_{(m,n)}$ и $a_{(m,n)} - b_{(m,n)}$ и вычислите явно $a_{(m,n)} - b_{(m,n)}$.

3. Найдите количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2000\}$, сумма элементов которых делится на **(a)** 4; **(b)** 3.

4. Погода в мае месяце бывает двух типов: хорошая и не очень. Учёные установили две закономерности: 1) 1 мая погода всегда не очень; 2) для $2 \leqslant k \leqslant 31$ погода k-го мая следующего года не очень тогда и только когда, когда в текущем году погода k и $k - 1$ мая отличалась. В каком году впервые погода в течение всего мая будет в точности такой же, как в 2007?

5. Для целого неотрицательного n найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ таких, что $P(2) = n$.

6. Множество натуральных чисел разбито на конечное число (больше одной) непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий. Докажите, что среди прогрессий найдутся две с одинаковой разностью.

7. На бесконечной клетчатой плоскости выбрали строку и заполнили её нулями, лишь в одну клетку поставив единицу. Строки ниже выбранной последовательно заполняются числами по следующему правилу: каждое число в новой строке — это сумма трёх чисел, стоящих в трёх соседних (по стороне или диагонали) клетках старой строки. Докажите, что в столбце, содержащем единичку исходной строки, нет чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

8. Даны два набора натуральных чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Некоторые числа в них могут встречаться по нескольку раз. Известно, что наборы $A + A = \{a_i + a_j \mid i \neq j\}$ и $B + B = \{b_i + b_j \mid i \neq j\}$ равны, в отличие от исходных наборов A и B (равенство наборов $\Longleftrightarrow$ все числа входят в них с одинаковой кратностью). Докажите, что n — степень двойки.