

Теория чисел, разнбой.

1. Найдите наименьшее натуральное t , для которого существуют такие натуральные числа x_1, x_2, \dots, x_t , что выполнено равенство

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_t^3 = 2002^{2002}.$$

2. Покажите, что если бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит квадрат и куб, то она должна содержать и шестую степень.
3. Пусть a и b — положительные целые числа, причем ab делит $a^2 + b^2 + 1$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

4. Найдите все натуральные числа n , что $2^n - 1$ делит $m^2 + 9$ для некоторого натурального m .
5. Найдите все пары положительных целых чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0$.
6. Найдите все натуральные n такие, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = n \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ имеет решение в натуральных числах.