Функциональные уравнения

1. Фиксировано натуральное число n. Пусть $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная функция, причём $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f^{(n)}(x) = x$ для любого $x \in [0,1]$ ($f^{(n)}$ — n-кратное применение f). Докажите, что $f(x) = x$ для всех $x \in [0,1]$.

2. Постройте хотя бы одну функцию $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такую, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}^+$ выполняется

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

3. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $f(xf(y)) = yf(x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$ и $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такие, что

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

для всех $m, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

5. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f(f(n)) + f(n+1) = n + 2.$$