Вероятностный метод

1. В таблице $n \times n$, каждое число $1, 2, \ldots, n$ встречается ровно n раз. Докажите, что существует ряд (строка или столбец), в котором не менее $\sqrt{n}$ различных чисел.

2. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ — различные подмножества натуральных чисел такие, что:
- $|A_i| = r$ и $|B_i| = s$, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;
- $|A_i \cap B_i| = \varnothing$, для любого $i = 1, 2, \ldots, n$;
- для любых $i \neq j$, $A_i \cap B_j \neq \varnothing$.
Докажите, что $n \leqslant C^r_{r+s}$.

3. Пусть A — множество из n различных остатков по модулю n^2. Докажите, что существует множество B, состоящее из n различных остатков по модулю n^2, такое, что не менее половины остатков по модулю n^2 можно записать в виде $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

4. В думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.

5. На плоскости нарисован граф с V вершинами и E рёбрами, причём $E \geqslant 4V$. Докажите, что найдётся не меньше $\frac{E^3}{64V^2}$ пар пересекающихся рёбер.

6. Периметр выпуклого многоугольника равен π. Докажите, что его проекция на некоторую прямую имеет длину хотя бы 1.

7. Прямые общего положения разбивают плоскость на части; *ограниченными* частями разбиения будем называть те из частей, которые имеют конечную площадь. Докажите, что для всех достаточно больших n верно следующее утверждение: в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.

Замечание. (IMO 2014.6) За доказательство утверждения задачи, в котором $\sqrt{n}$ заменено на $c\sqrt{n}$, начислялись баллы, в зависимости от константы c.