Лемма Шпернера

Определение. *Триангуляцией* многоугольника на плоскости называется разбиение многоугольника на треугольники, любые два из которых либо вообще не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону.

0. На окружности отмечено несколько красных и несколько синих точек. Докажите, что число дуг разбиения с разноцветными концами чётно.

1. Сферу триангулировали, вершины триангуляции произвольным образом раскрашены в три цвета. Докажите, что число треугольников триангуляции с разноцветными вершинами чётно.

2. **Лемма Шпернера.** Дана триангуляция треугольника ABC. Вершины A, B и C раскрашены в цвета 1, 2 и 3 соответственно. Вершины треугольников триангуляции на стороне AB раскрашены в цвета 1 и 2 (аналогично на AC — в 1 и 3, на BC — в 2 и 3). Вершины внутри раскрашены в произвольные цвета (1, 2 или 3). Докажите, что найдется треугольник триангуляции с разноцветными вершинами.

3. Каждую сторону треугольника поделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные его сторонам. В результате получилась триангуляция треугольника. Каждую вершину триангуляции покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число двуцветных ребер триангуляции четно.

4. Квадрат $[0, 2n + 1] \times [0, 2n + 1]$ координатной плоскости разрезан на треугольники, координаты всех вершин целочисленны. Докажите, что найдется треугольник с нецелой площадью.

5. **Теорема Брауэра.** Дан треугольник $\triangle$ (с границей и со внутренностью) и непрерывное отображение $f\colon \triangle \to \triangle$. Используя лемму Шпернера, докажите, что отображение f обладает неподвижной точкой.

6. **Лемма Таккера.** Дана триангуляция правильного чётноугольника, каждая вершина триангуляции отмечена одним из чисел $\{1, 2, -1, -2\}$. Оказалось, что противоположные вершины исходного правильного чётноугольника отмечены противоположными числами. Докажите, что существуют две вершины с противоположными числами, соединённые ребром.

7. **Теорема Борсука-Улама.** Докажите, что для любого антиподального непрерывного отображения $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ существует такая точка $x_0 \in S^2$, что $f(x_0) = (0, 0)$. *Сфера* S^2 — обычная двумерная сфера в трёхмерном пространстве. Отображение $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *антиподальным*, если значения f в диаметрально противоположных точках сферы в сумме дают $(0, 0)$.

8. **(a)** Квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ координатной плоскости разрезан на n равновеликих треугольников, все вершины которых имеют двоично-рациональные координаты. Докажите, что n — чётное число. **(b)** Квадрат разрезан на n равновеликих треугольников. Докажите, что n — чётное число.