# Последовательности

**1.** Последовательность $\{a_i\}$ такова, что $a_0 = a_1 = 1$, а $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$. Докажите, что $a_k$ — точный квадрат.

**2.** Дана некоторая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Среди членов арифметической прогрессии встречаются числа $a_1^2, a_2^2, a_3^2$. Докажите, что все члены прогрессии — целые числа.

**3.** а) Докажите, что если для некоторых натуральных $a, b, k$ выполнено равенство $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$, то $k$ — точный квадрат.
б) Для некоторого натурального $m$ зададим последовательность $a_0 = 0$, $a_1 = m$, $a_{n+2} = m^2 a_{n+1} - a_n$. Докажите, что любые два натуральных числа $x \geqslant y$, для которых $\frac{x^2+y^2}{xy+1} = m^2$, являются соседними членами этой последовательности.

**4.** Дано натуральное число $k$. Докажите, что существует такая бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$, что для любого $n$ число $a_n^2 + k$ делится на $a_{n+1}$, а число $a_{n+1}^2 + k$ делится на $a_n$.

**5.** Последовательность $\{a_i\}$, состоящая из натуральных чисел, такова, что для любого натурального $n$ выполнено $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$. Докажите, что при $n > 100$ число $a_n - 22$ составное.

**6.** Последовательность $a_i$ действительных чисел такова, что для любых натуральных $m$ и $n$ выполнено $|a_m + a_n - a_{m+n}| \leqslant \frac{1}{m+n}$. Докажите, что последовательность $a_i$ является арифметической прогрессией.

**7.** Даны вещественные числа $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$. Зададим последовательности $u_0, u_1 \ldots u_n$ и $v_0, v_1 \ldots v_n$: $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$ и $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$, $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Докажите, что $u_n = v_n$.

**8.** Бесконечная возрастающая последовательность чисел $\{a_i\}$ такова, что $a_{k+1} - a_k < 1000$. Докажите, что сущестует бесконечно много пар натуральных чисел $n < m$, что $a_m$ делится на $a_n$.