Комбинаторика множеств

1. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$ для любых $A, B \in \mathcal{F}$.
а) Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$.
б) Правда ли, что если $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$, то существует $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $x \in A$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

2. Пусть $\mathcal{F}$ — такое семейство из 2^{n-1} подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ для любых $A, B, C \in \mathcal{F}$. Докажите, что существует $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $x \in A$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

3. а) Через $X^{(k)}$ обозначим все подмножества мощности k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что для $k < n/2$ существует инъективная функция $f_k : X^{(k)} \to X^{(k+1)}$ такая, что $A \subset f(A)$. А для $k > n/2$ существует инъективная функция $g_k : X^{(k)} \to X^{(k-1)}$ такая, что $g_r(A) \subset A$.
б) *Системой Шпернера* называется такое семейство подмножеств $\mathcal{F}$, что для любых различных $A, B \in \mathcal{F}$ верно $A \not\subset B$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ является системой Шпернера. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant C_n^{[n/2]}$.

4. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ является системой Шпернера, а $X^{(k)}$ — семейство всех подмножеств мощности k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \cap X^{(k)}$. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} |\mathcal{F}_k| / C_n^k \leqslant 1.$$

5. Дано множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – подмножества S со следующими свойствами:
(1) $|A_i| \geqslant 5$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$;
(2) $|A_i \cap A_j| \leqslant 2$ $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$.
Найдите максимально возможное значение k.

6. а) Пусть $\mathcal{F}$ — такое семейство подмножеств *нечётной* мощности множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что мощность $|A \cap B|$ *чётна* для любых различных $A, B \in \mathcal{F}$. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant n$.
б) Пусть $\mathcal{F}$ — такое семейство подмножеств *чётной* мощности множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что мощность $|A \cap B|$ *нечётна* для любых различных $A, B \in \mathcal{F}$. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

7. **Теорема Эрдеша-Ко-Радо.** Пусть $n \geqslant 2k$. Пусть $\mathcal{F}_k$ — семейство попарно пересекающихся k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что $|\mathcal{F}_k| \leqslant C_{n-1}^{k-1}$.