

Планиметрический разнобой

1. В треугольнике ABC , у которого $\angle B = 45^\circ$, проведена высота AH . На отрезке BC нашлась отметили такую точку K , что $CK = CA$. Докажите, что центр вневписанной окружности треугольника ACH напротив вершины C равноудалён от B и K .
2. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка P . Пусть X и Y — проекции P на AB и AC , а M и N — середины BC и XY соответственно. Докажите, что $PN \perp MN$.
3. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его отрезков AB и AC в точках P и Q . Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков PQ и BC , параллельна биссектрисе угла BAC .
4. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 . Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают внешнюю биссектрису угла BAC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые C_1X и B_1Y пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC .
5. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 ; P — произвольная точка плоскости. Серединный перпендикуляр к отрезку PA_1 пересекает прямую BC в точке A_2 . Точки B_2 и C_2 строятся аналогично. Докажите, что A_2 , B_2 , C_2 лежат на одной прямой.
6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Вписанная окружность треугольника ABD касается сторон AB , AD , BD в точках P , U , M . Вневписанная окружность треугольника ACD касается отрезка CD в точке N и прямых AC , AD в точках Q и W . Докажите, что W лежит на прямой PM , а U — лежит на прямой QN .
7. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X . Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX , отличная от BC , пересекает отрезок AX в точке Y . Докажите, что длина отрезка AU не зависит от выбора точки X .