

## Многочлены

1. Дан график функции  $y = ax^2$ . Прямая пересекает её в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ , а саму ось абсцисс в точке с координатой  $x_3$ . Докажите, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$ .
2. Сто последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  в 50 квадратных уравнениях вида  $x^2 + a_k x + b_k = 0$ . Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?
3. Дан многочлен  $P(t) = t^2 - 4t$ . Доказать, что при любых  $x \geq 1$  и  $y \geq 1$  выполняется  $P(x^2 + y^2) \geq P(2xy)$ .
4. Дано множество различных чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ . Могло ли так оказаться, что множество корней уравнений  $x^2 - a_i x + b_i = 0$  (для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ ) совпадает с исходным множеством?
5. Приведённые квадратные трёхчлены  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что уравнения

$$f(g(x)) = 0 \quad \text{и} \quad g(f(x)) = 0$$

не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений  $f(f(x)) = 0$  и  $g(g(x)) = 0$  тоже не имеет вещественных корней.

6. Уравнение  $x^4 + t_1 x^3 + t_2 x^2 + t_3 x + t_4 = 0$  имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Какое наименьшее значение может принимать  $t_2$ , если  $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{Z}$ ?
7. Каждая из двух прямых, параллельных оси  $Ox$ , пересекают график функции  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ : в трёх точках, (смотри рисунок). Докажите, что длина проекции дуги  $CD$  на ось  $Ox$  равна сумме длин проекций дуг  $AB$  и  $EF$ .

