

Аддитивная комбинаторика

1. Из различных натуральных чисел, каждое из которых меньше n , составлены два набора. Докажите, что если общее количество чисел в наборах не меньше n , то из каждого набора можно выбрать по одному числу так, чтобы их сумма была равна n .
2. Пусть A и B — конечные множества натуральных чисел. Через $A + B$ обозначим множество чисел $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Докажите, что $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.
3. Среди чисел от 1 до 100 выбрали некоторые 16. Докажите, что среди этих шестнадцати найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b = c + d$.
Кстати, такая конфигурация чисел называется параллелограммом.
4. Дано 101 различных натуральных чисел из диапазона от 1 до 10^6 , эти числа будут синими. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы суммы красного и синего ($100 \cdot 101$ сумм) числа не совпадали.
5. Числа $1, 2, \dots, 2n$ разбиты на два множества по n чисел. Для каждого множества посчитали все n^2 возможных сумм $a + b$, где a и b из этого множества, и от каждой суммы взяли остаток по модулю $2n$. Докажите, что набор из n^2 остатков от одного множества совпадает с набором из n^2 остатков от другого.
6. Пусть a_1, \dots, a_n — различные натуральные числа, а M — множество из $n - 1$ натуральных чисел, не содержащее число $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Кузнечик сидит в нуле. Докажите, что он может сделать так прыжки вправо длинами a_1, \dots, a_n в некотором порядке (каждой длины должен быть ровно один прыжок), что он не попадёт ни в одно число множества M .
7. *Теорема Коши-Дэвенпорта.* Пусть A и B — два подмножества множества остатков по модулю p , где p — простое число. Докажите, что $|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}$.
8. *Теорема Шура.* Все числа натурального ряда покрашены в один из k цветов. Докажите, что найдутся такие числа a, b, c одного цвета, что $a + b = c$.