Плотность числовых множеств. Разбиения $\mathbb{Z}$ на арифметические прогрессии.

1. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i. Пусть $\sum \frac{1}{d_i} = S$. **(a)** Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$. **(b)** Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leqslant 1$, причём иногда неравенство строгое.

2. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ — последовательность натуральных чисел *с положительной плотностью* (т. е. существует $\varepsilon > 0$, что в любом отрезке $1, 2, \ldots, N$ содержится не меньше $N\varepsilon$ членов последовательности). Докажите, что можно выделить из неё бесконечную подпоследовательность чисел, ни одно из которых не делит другое.

3. Пусть $a_1 < \ldots < a_k \leqslant n$ — набор натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное любых двух из них больше n. Докажите, что $\sum \frac{1}{a_i} < 2$.

4. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Выступление сборной Москвы на финале Всероссийской олимпиады школьников оценивается по n показателям, причём показатель номер i может принимать любые натуральные значения от 1 до a_i. Сборная Москвы *улучшила* результат по сравнению с прошлым годом, если все показатели, за исключением не более чем одного, выросли. Пусть $S = \sum \frac{1}{a_i}$.

(a) Докажите, что если $S > 1$, то сборная Москвы не сможет бесконечно долго улучшать результаты.

(b) Докажите, что если $S \leqslant \frac{1}{2}$, то возможна ситуация, когда сборная Москвы бесконечно долго улучшает свои результаты.

5. Существуют ли 2017 непересекающихся арифметических прогрессий натуральных чисел таких, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2017, и лишь конечное количество натуральных чисел в них не лежит?

6. В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ каждое натуральное число встречается ровно один раз. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что НОД$\,(a_n, a_{n+1}) \leqslant \frac{3n}{4}$.

7. Рассмотрим n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Предположим, что прогрессии в объединении покрывают какие-то 2^n последовательных целых чисел. Докажите, что прогрессии в объединении покрывают все целые числа.

Сама по себе это сложная задача, вот вам лемма.

Лемма. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k, z_1, z_2, \ldots, z_k$ — комплексные числа, причём все $z_i \neq 0$. Предположим, что при всех $t = 0, 1, \ldots, k-1$ выполнено равенство

$$a_1 z_1^t + a_2 z_2^t + \ldots + a_k z_k^t = 0.$$

Тогда оно выполнено при всех целых t.

8. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая двум условиям.

- При всех $m, n \in \mathbb{N}$ число $\dfrac{f^{(n)}(m) - m}{n}$ лежит в $\mathbb{N}$, где $f^{(n)}(m) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ раз}}(m)))$.
- f не принимает лишь конечное число значений.

Докажите, что последовательность $a_m = f(m) - m$ периодична.