Разнобой

1. В библиотеке повесили две доски и ввели правило: приходящий должен написать на первую доску количество людей, которых он застал в библиотеке, а выходящий должен написать на вторую доску число людей, остающихся в библиотеке. Докажите, что за день на первой и второй доске будет написан один и тот же набор чисел (возможно в разном порядке).

2. Некоторое количество окружностей расположено в пространстве так, что любые две из них пересекаются по двум точкам. Докажите, что либо все окружности имеют две общие точки, либо все они лежат на одной сфере (или плоскости).

3. Дано $n+1$ различных натуральных чисел, не превосходящих $2n$. Докажите, что среди них найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

4. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ - такие комплексные числа, что $|z_1| + \ldots + |z_n| = 1$. Докажите, что существует такое подмножество S множества $\{z_1, \ldots, z_n\}$, что

$$\left|\sum_{z\in S} z\right| \geqslant \frac{1}{6}.$$

5. Двое играют в игру: они по очереди заполняют таблицу 100×100 плюс и минус единицами, пока она не заполнится. В конце суммируются произведения во всех строках и столбцах. Начинающий выигрывает, если эта сумма неотрицательна, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Точка M лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Луч BM пересекает AC в точке P. Точка K симметрична точке M относительно прямой AC. Луч BK пересекает сторону AC в точке Q. Оказалось, что $\angle CMQ = \angle AMP$. Докажите, что $\angle CBQ = \angle ABP$.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} + \frac{1}{1+a+b} \leqslant 1.$$

Разнобой

1. В библиотеке повесили две доски и ввели правило: приходящий должен написать на первую доску количество людей, которых он застал в библиотеке, а выходящий должен написать на вторую доску число людей, остающихся в библиотеке. Докажите, что за день на первой и второй доске будет написан один и тот же набор чисел (возможно в разном порядке).

2. Некоторое количество окружностей расположено в пространстве так, что любые две из них пересекаются по двум точкам. Докажите, что либо все окружности имеют две общие точки, либо все они лежат на одной сфере (или плоскости).

3. Дано $n+1$ различных натуральных чисел, не превосходящих $2n$. Докажите, что среди них найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

4. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ - такие комплексные числа, что $|z_1| + \ldots + |z_n| = 1$. Докажите, что существует такое подмножество S множества $\{z_1, \ldots, z_n\}$, что

$$\left|\sum_{z\in S} z\right| \geqslant \frac{1}{6}.$$

5. Двое играют в игру: они по очереди заполняют таблицу 100×100 плюс и минус единицами, пока она не заполнится. В конце суммируются произведения во всех строках и столбцах. Начинающий выигрывает, если эта сумма неотрицательна, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Точка M лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Луч BM пересекает AC в точке P. Точка K симметрична точке M относительно прямой AC. Луч BK пересекает сторону AC в точке Q. Оказалось, что $\angle CMQ = \angle AMP$. Докажите, что $\angle CBQ = \angle ABP$.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} + \frac{1}{1+a+b} \leqslant 1.$$