Запрещённые подграфы и наследственность

Свойство $\mathcal{P}$ графа называется *наследственным*, если для любого графа G, обладающего $\mathcal{P}$, любой подграф G также обладает $\mathcal{P}$. Примеры: планарность, отсутствие данного подграфа, k-раскрашиваемость.

1. **Лемма о наследственном свойстве.** Если $P(n)$ — максимальное число рёбер в графе с наследственным свойством $\mathcal{P}$ на n вершинах, то $P(n) \leqslant \frac{n}{n-2}P(n-1)$.

2. **Теорема Турана.** Максимальное число $P(n)$ рёбер в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на k вершинах, достигается в случае $(k-1)$-дольного графа G_n с примерно равными по числу вершин долями (т. е. размеры долей G_n различаются не более чем на 1).

Приведите оценку из леммы о наследственном свойстве к виду $P(n) \leqslant P_n + \varepsilon$, где P_n — число рёбер в G_n, а $\varepsilon < 1$.

Следствие. Минимальное число рёбер в графе на n вершинах, не содержащим пустого подграфа на k вершинах, достигается в ситуации несвязного объединения $k-1$ примерно одинаковых полных подграфов.

3. В графе 30 вершин и некоторое число рёбер. Каждое ребро покрашено в один из двух цветов так, что нет одноцветных треугольников. Какое максимальное количество рёбер может быть в графе?

4. Найдите максимальное число рёбер в графе на n вершинах, в котором любые два простых цикла имеют общую вершину.

5. В одной из вершин графа G прячется зайчик. Зайчик и пушка играют в следующую игру, ходят по очереди. Своим ходом пушка стреляет в какую-то вершину графа G. Если зайчик сидит в ней, то немедленно погибает. Если нет, то он обязательно перемещается в соседнюю вершину графа. Пушка не видит зайчика. Опишите все графы G, для которых пушка сможет уничтожить зайчика.

6. На плоскости отмечены $4n$ точек, пары точек на расстоянии 1 соединены отрезками. Оказалось, что среди любых $n+1$ точки есть две, соединённые отрезком. Докажите, что отрезков проведено не меньше, чем **(a)** $6n$; **(b)** $7n$.

7. **(a)** *Треугольником* назовем тройку вершин графа, попарно соединенных рёбрами. Каково наибольшее возможное число треугольников в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на четырёх вершинах? **(b)** Каково наибольшее возможное количество полных подграфов размера k в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на $k+1$ вершине?