Комбинаторная геометрия

1. Докажите, что если в выпуклом n-угольнике все углы равны и последовательные стороны удовлетворяют соотношениям: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Плоскость разбита на части N прямыми общего положения. Докажите, что в этих частях можно расставить ненулевые не превосходящие по модулю N целые числа так, чтобы сумма чисел в каждой полуплоскости относительно любой прямой была нулевой.

3. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ разрезан на параллелограммы трёх типов: со сторонами, параллельными AB и BC; со сторонами, параллельными BC и CD; со сторонами, параллельным и CD и AB. Докажите, что суммарные площади параллелограммов каждого типа равны.

4. На плоскости даны $n \geqslant 3$ точек. Пусть d — максимальное расстояние между любыми двумя из этих точек. Назовём его диаметром данной системы точек. Докажите, что этих диаметров не больше n.

5. Внутри круга расположены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, на его границе — точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ не пересекаются. Кузнечик может перепрыгнуть из точки A_i в точку A_j, если отрезок A_iA_j не пересекается ни с одним из отрезков A_kB_k, $k \neq i, j$. Докажите, что за несколько прыжков кузнечик сможет попасть из любой точки A_p в любую точку A_q.

6. Докажите, что если n точек плоскости не лежат все на одной прямой, то количество прямых, соединяющих попарно эти точки, не меньше n.

7. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через каждую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.