Многочлены деления круга, часть 2

1. Опишите все способы расставить целые массы в вершинах правильного n-угольника так, чтобы центр расставленных масс совпадал с центром n-угольника, если **(a)** $n = p$; **(b)** $n = p^2$; **(c)** $n = pq$ (p и q — различные простые числа).

2. Докажите, что в бесконечной последовательности

$$10001, 100010001, 1000100010001, 10001000100010001 \ldots$$

нет простых чисел ($10001 = 73 \times 137$).

3. Вася смог с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник. Докажите, что $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, где s — целое неотрицательное, а p_i — различные простые нечётные числа вида $2^{m_i} + 1$.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что максимальный простой делитель числа $n^2 + n + 1$ меньше чем $\sqrt[99]{n}$.

5. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}\}$ — все остатки по нечётному модулю $n > 1$, взаимно простые с n. Для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ обозначим s_i количество непустых подмножеств B множества A с суммой элементов i. Докажите, что $s_i = s_j$ при всех $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

6. Докажите, что максимальный по модулю коэффициент $\Phi_n(x)$ может быть сколь угодно большим. *Занимательный факт: наименьшее n, при котором у $\Phi_n(x)$ существует коэффициент, отличный от 0 и ± 1, это $n = 105$.*

7. Комплексные корни приведённого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами лежат на окружности $x\bar{x} = 1$. Докажите, что все его корни в некоторой степени дают 1.