Спецификация

0_1. Докажите, что любая натуральная степень многочлена $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ имеет хотя бы один отрицательных коэффициент.

0_2. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0; 2)$ три действительных корня. Докажите, что выполнено неравенство

$$-2 < p + q + r < 0.$$

1. Последовательность нулей и единиц строится следующим образом: на k-м месте ставится нуль, если сумма цифр числа k чётна, а иначе (если сумма цифр числа k нечётна) ставится единица. Докажите, что эта последовательность непериодична.

2. В числе $a = 0{,}12457\ldots$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$ (для каждого натурального n). Докажите, что a — иррациональное число.

3. Функции f и g определены на всей числовой прямой и взаимно обратны. Известно, что f представляется в виде суммы линейной и периодической функций: $f(x) = kx + h(x)$, где k — константа, а $h(x)$ — периодическая функция. Докажите, что g также представляется в таком виде.

4. В школе (где училось не менее 6 человек) подвели итоги учебного года. Выяснилось, что в любом множестве из 5 и более учеников не менее 80% двоек, полученных этими учениками в течение года, поставлены не более чем 20% учеников из этого множества. Докажите, что по крайней мере три четверти всех двоек, поставленных в школе, получил один ученик.

5. Существует ли такая бесконечная последовательность, состоящая из
(a) действительных; **(b)** целых
чисел, что сумма любых десяти подряд идущих чисел положительна, а сумма первых подряд идущих $10n + 1$ чисел отрицательна при любом натуральном n.

6. Все члены бесконечной арифметической прогрессии — натуральные числа. В каждом числе удалось подчеркнуть одну или несколько подряд идущих цифр так, что в первом числе оказалась подчеркнута цифра 1, во втором — цифра 2, …, в 23-м — цифры 2 и 3 подряд и т. д. Докажите, что разность прогрессии — это степень числа 10.