

Комбинаторика

1. Докажите, что из множества 108 различных трёхзначных чисел можно выбрать четыре попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.
2. Фигуру площади 1, вырезанную из бумаги, разделили на десять областей и покрасили их в десять различных цветов. Затем фигуру перевернули и на обратной стороне разделили её на десять областей каким-то другим способом. Докажите, что новые области можно покрасить в десять различных цветов так, чтобы сумма площадей кусков, раскрашенных с обеих сторон одинаковым цветом, была не меньше 0.1.
3. В дереве 100 висячих вершин. Докажите, что можно добавить в дерево 50 рёбер так, чтобы при удалении любого ребра из получившегося графа он оставался связным.
4. Дан граф, степень каждой вершины которого равна 3. Известно, что число правильных раскрасок рёбер в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
5. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдется отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющих общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?
6. Дано 2^n всевозможных n -мерных векторов, состоящих из 1 и -1 . Некоторые числа в векторах заменили нулями. Докажите, что можно выбрать несколько получившихся векторов, сумма которых будет равна нулевому вектору.
7. В нескольких мешках лежит ровно $\frac{n(n+1)}{2}$ монет. За один ход мы берём по одной монете из мешка, заводим новый мешок и кладём туда взятые монеты. Пустые мешки выкидываем. Докажите, что через некоторое время распределение монет по мешкам стабилизируется.