Числовые поля, расширения полей

Числовым полем будем называть подмножество $\mathbb{K}$ комплексных чисел, содержащее 0 и 1, замкнутое относительно операций сложения, умножения и взятия обратного элемента по сложению и умножению. Если $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ — числовые поля, то $\mathbb{L}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$; *степенью расширения* $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ называется размерность $\mathbb{L}$ над $\mathbb{K}$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$. Символом $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ будем обозначать минимальное по включению числовое поле, включающее $\mathbb{K}$ и содержащее все x_i.

Пусть $x_0 \in \mathbb{C}$, $\mathbb{K}$ — числовое поле. Элемент x_0 называется *алгебраическим* над полем $\mathbb{K}$, если существует многочлен $P(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ такой, что $P(x_0) = 0$; в противном случае x_0 называется *трансцендентным* над $\mathbb{K}$. Для алгебраического x_0 многочлен $P(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ наименьшей степени, удовлетворяющий $P(x_0) = 0$, называется *минимальным многочленом* x_0 над $\mathbb{K}$.

1. Докажите, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$.

2. Ясно, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ есть множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Найдите такое же представление для $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ и вычислите $\big[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}\big]$.

3. Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ — числовые поля. Докажите, что $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{K}] \cdot [\mathbb{M} : \mathbb{L}]$.

4. Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, а $x_0 \in \mathbb{C}$ — алгебраический элемент над $\mathbb{K}$. Докажите, что минимальный многочлен $P(x)$ элемента x_0 над $\mathbb{K}$ неприводим (в кольце многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$), и что любой многочлен $Q(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, удовлетворяющий $Q(x_0) = 0$, делится на $P(x)$.

5. Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, а $x_0 \in \mathbb{C}$ — алгебраический элемент над $\mathbb{K}$. Докажите, что число $\big[\mathbb{K}[x_0] : \mathbb{K}\big]$ равно степени минимального многочлена элемента x_0 над $\mathbb{K}$.

6. Вася хочет написать конечную формулу, состоящую из рациональных констант и знаков арифметических операций $+, -, \times, /, \sqrt{\ }$, значением которой был бы $\sqrt[3]{2}$. Докажите, что у него ничего не получится.

7. На плоскости дан отрезок длины 1. Из предыдущей задачи выведите непостроимость циркулем и линейкой отрезка длины $\sqrt[3]{2}$.

8. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Докажите, что

$$\big[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}\big] = 2^n.$$

9. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равные прямоугольные треугольники с углом 30°.

10. Квадрат со стороной 1 разрезали на равные прямоугольники. Докажите, что стороны прямоугольников рациональны.

11. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Доказать, что число треугольников четно.

12. (*Теорема Дена о разрезании прямоугольника*) Прямоугольник разрезан на необязательно равные квадраты. Докажите, что отношение сторон прямоугольника рационально.