

## Многочлены. Производные, дискретные производные

1. Многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами степени  $n$  имеет  $n$  различных вещественных корней. Какое максимальное число коэффициентов этого многочлена могут быть нулевыми?
2. Докажите, что при всех натуральных  $n$  у многочлена  $1 + x + x^2/2 + \dots + x^n/n!$  не более одного вещественного корня.
3. Существует ли пара многочленов с целыми коэффициентами  $P(x)$  и  $Q(x)$  степени выше первой, удовлетворяющих тождеству

$$P(Q(x)) = x^{3375} + 3375x^{3374} + 2x + 1?$$

4. Исходно на доске написаны многочлены  $x^3 - 3x^2 + 5$  и  $x^2 - 4x$ . Если на доске уже написаны многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , то на доску можно добавить многочлены  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $f(g(x))$  и  $cf(x)$ , где  $c$  — вещественное. Может ли при некотором  $n$  на доске оказаться многочлен  $x^n - 1$ ?
5. Обозначим  $f(n)$  минимум выражения  $|1^{2017} \pm 2^{2017} \pm \dots \pm n^{2017}|$ , где минимум берётся по всевозможным расстановкам знаков «+» и «-». Докажите, что, начиная с некоторого момента, последовательность  $f(n)$  периодична.
6. **Теорема Мардена.** Корни кубического многочлена  $P(z)$  с комплексными коэффициентами лежат в вершинах треугольника  $ABC$ . Докажите, что корни его производной  $P'(z)$  соответствуют фокусам вписанного эллипса Штейнера треугольника  $ABC$ . (*Эллипс Штейнера — максимальный по площади вписанный в треугольник эллипс*).
7. **Теорема Гаусса-Люка.** Для любого непостоянного многочлена  $P(z)$  с комплексными коэффициентами корни его производной  $P'(z)$  принадлежат выпуклой оболочке корней  $P(z)$ .
8. По кругу выписаны  $n$  чисел  $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{n-1}$  ( $a_i \in \mathbb{Z}_n$ ). За один ход разрешается выбрать целое число  $0 \leq s < n$  и заменить все числа по правилу  $a'_i = a_i - a_{s+i}$ , где  $a'_i$  — новое значение  $a_i$ . Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра  $s$  на каждом ходу (на разных ходах параметр  $s$  может быть разным), рано или поздно все числа  $a_i$  станут кратными  $n$ , если **(а)**  $n = p$ ; **(б)**  $n = p^k$  ( $k$  — натуральное,  $p$  — простое).