10 класс Разнобой 14 мая 2018

1. Существует ли многочлен, который в каждой положительной целой точке принимает значение, равное ее сумме цифр?

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

3. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

4. Шахматная доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 1×2 (каждая кость покрывает две клетки). Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

5. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо есть два многоугольника с одинаковым числом сторон.

6. Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

7. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

8. При каких натуральных n найдутся такие целые a, b, c, что их сумма равна нулю, а число $a^n + b^n + c^n$ — простое?

10 класс Разнобой 14 мая 2018

1. Существует ли многочлен, который в каждой положительной целой точке принимает значение, равное ее сумме цифр?

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

3. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

4. Шахматная доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 1×2 (каждая кость покрывает две клетки). Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

5. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо есть два многоугольника с одинаковым числом сторон.

6. Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

7. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

8. При каких натуральных n найдутся такие целые a, b, c, что их сумма равна нулю, а число $a^n + b^n + c^n$ — простое?